

семь видов неопределённостей и как раскрывать каждую

вид	как узнать · чем раскрыть	пример
$\frac{0}{0}$	при $x \rightarrow a$ числитель $\rightarrow 0$ и знаменатель $\rightarrow 0$ разложить на множители и сократить на $(x-a)$; с корнями — домножить на сопряжённое	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$
$\frac{\infty}{\infty}$	числитель $\rightarrow \infty$ и знаменатель $\rightarrow \infty$ поделить на старшую степень x числитель и знаменатель	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x}{x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{5}{x^2}} = 3$
$\infty - \infty$	разность, обе части $\rightarrow +\infty$ дроби — к общему знаменателю ; корни — домножить на сопряжённое	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}$
$0 \cdot \infty$	произведение: один множитель $\rightarrow 0$, другой $\rightarrow \infty$ свести к дроби : $f \cdot g = \frac{f}{1/g}$, дальше как $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$
1^∞	основание $\rightarrow 1$, показатель $\rightarrow \infty$ второй замечательный предел $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$: $\lim u^v = e^{\lim v \cdot (u-1)}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^{\lim x \cdot \frac{2}{x}} = e^2$
0^0	основание $\rightarrow 0^+$, показатель $\rightarrow 0$ логарифмировать : $u^v = e^{v \ln u}$, в показателе будет $0 \cdot \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^{\lim x \ln x} = e^0 = 1$
∞^0	основание $\rightarrow \infty$, показатель $\rightarrow 0$ логарифмировать : $u^v = e^{v \ln u}$, в показателе будет $0 \cdot \infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$

Правило Лопиталья для $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$, если предел справа существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$

Не неопределённости — ответ сразу: $\frac{1}{0^+} = +\infty$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $0^{+\infty} = 0$, $\frac{0}{\infty} = 0$